

10 Anwendungen der Geometrie im Raum

10.1 Mathematische Modelle realer Situationen

165/1 Landeanflug ohne und mit Seitenwind

a) Sinkrate: $s = |v_3| = 3 \text{ m/s}$

Geschwindigkeit: $v = \left| \vec{v} \right| = \sqrt{(-24)^2 + (-12)^2 + (-3)^2} = 27 \text{ [m/s]}$

b) Aufsetzpunkt A: Schnittpunkt mit der x_1 - x_2 -Ebene: $x_3 = 0$
 $\Rightarrow t = 15 \text{ [s]}, A(0|100|0)$

$$\sin \phi = \frac{\left| \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{27} = \frac{1}{9} \Rightarrow \phi \approx 6,4^\circ > 4^\circ \Rightarrow \text{harte Landung}$$

c) Entfernung: $d = \left| \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 360 \\ 280 \\ 45 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36225 - 7290t + 729t^2}$

minimale Entfernung: $d' = 0 \Rightarrow t = 5$ (also 10 s vor der Landung) $\Rightarrow h = 30 \text{ m}$

$d_{\min} = \sqrt{18000} \approx 134 \text{ [m]}$

d) Landung bei $t = 15 \text{ s}$, $\vec{X}_S = \begin{pmatrix} 360 \\ 280 \\ 45 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Aufsetzpunkt } A(60|-20|0)$

$$d = \sqrt{\left| \begin{pmatrix} 60 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2} = \sqrt{18000} \approx 134 \text{ [m]}$$

165/2 Flugsicherung

a) $\vec{X}_{\text{Airbus}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{X}_{\text{Antonow}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7,5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Die Flugbahnen verlaufen parallel zur Erdoberfläche, der Airbus in 10 km Höhe und die Antonow in 9 km Höhe. Sie fliegen zueinander parallel in dieselbe Richtung.

c)

$$d_0 = \sqrt{\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right|^2} = \sqrt{251} \approx 15,8 \text{ [km]}$$

$$d(t) = \sqrt{\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7,5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2} = \sqrt{251 - 75t + 6,25t^2} \Rightarrow d_{\min} \text{ bei } t=6$$

$d_{\min} = \sqrt{26} \approx 5,1 \text{ [km]}$

d) $d_{\text{Airbus}} = \sqrt{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2} = \sqrt{109 - 54t + 225t^2} = 150 \Rightarrow t_1 \approx -9,9, t_2 \approx 10,1$

Einflug um etwa 11.50 Uhr, Ausflug um etwa 12.10 Uhr

- d) jeweils Schnittpunkt der Sonnenstrahlen durch S mit der x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$
 8.00 Uhr: S8(1,79|0|-1,59)
 10.00 Uhr: S10(0,59|0|-1,58)
 12.00 Uhr: S12(0|0|-1,59)
 14.00 Uhr: S14(-0,59|0|-1,58)
 16.00 Uhr: S16(-1,79|0|-1,59)
 Alle Punkte haben (näherungsweise) die gleiche x_3 -Koordinate.
- e) Schatten der Stabspitze liegt um 10.00 Uhr und um 14.00 Uhr bzw. um 8.00 Uhr und um 16.00 Uhr symmetrisch zur x_3 -Achse. \Rightarrow Kirche steht genau in Ost-West-Richtung.
 (Anmerkung: Dieses Ergebnis ergibt sich dadurch, dass die x_1 -Achse in der Südwand der Kirche verläuft und nach Westen gerichtet sein soll. In der Realität steht die Kirche nicht genau in Ost-West-Richtung.)
- f) E: $0,78x_2 - 0,91x_3 - 1,4365 = 0$
 Da der Stab der Sonnenuhr parallel zur Erdachse verläuft und diese senkrecht auf der Äquatorialebene steht, ist E parallel zu Äquatorialebene.
 $Z: x_2 = 0 \Rightarrow g = E \cap Z: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,58 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 Alle Punkte aus Aufgabe d) haben (näherungsweise) die x_3 -Koordinate $-1,58$.

167/5 Der ungleichmäßige Lauf der Sonnenuhr

- a) 5. November: Sonnenuhr geht ca. 17 Minuten vor
 10. Februar: Sonnenuhr geht ca. 14 Minuten nach
- b) $\Delta T(t) = 7 \sin \frac{2\pi}{365} (t - 185) + 10 \sin \frac{4\pi}{365} (t - 80)$
 5. November: $t = 309, \Delta T(309) = 15,9 \text{ min}$
 10. Februar: $t = 41, \Delta T(41) = -14,0 \text{ min}$
- c) $365 \cdot \overline{\Delta T}$ ist geometrisch die Flächenbilanz zwischen dem Graphen von ΔT und der x -Achse, also die kumulierte Abweichung der von der Sonnenuhr in Verlauf des Jahres angezeigten Zeit von der tatsächlichen, also ist $\overline{\Delta T}$ die durchschnittliche Abweichung pro Tag.

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0, \Delta T_1 \text{ durchläuft innerhalb eines Jahres genau eine Periode, } \Delta T_2$$

$$\text{genau zwei} \Rightarrow \overline{\Delta T} = \frac{1}{365} \int_0^{365} \Delta T \, dt = \frac{1}{365} \int_0^{365} \Delta T_1 \, dt + \frac{1}{365} \int_0^{365} \Delta T_2 \, dt = 0$$

Für $\overline{\Delta T} = 10 \text{ s}$ würde die Sonnenuhr pro Tag 10 Sekunden vorgehen.

168/6 Licht und Schatten

- a) A (10|8|6), B(0|8|6), C (0|4|9), D (10|4|9); $A_{\text{Dach}} = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 100 \text{ [m}^2\text{]}$

$$\cos \phi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}}{25} = -\frac{7}{25} \Rightarrow \phi \approx 106,3^\circ$$

- b) Sonnenstrahl durch C: $c: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, Traufebene T: $x_3 = 6$

Schnittpunkt S von c und T: $k = 0,75 \Rightarrow S(0|6,25|6)$ und $s_2 = 6,25 < 8 = b_2 \Rightarrow$ Beh.

Sonnenstrahl durch B: $b: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, Garagendach D: $x_3 = 3$

Schnittpunkt T von b und D: $k = 0,75 \Rightarrow T(0|10,25|3)$

Schattenfläche: $\frac{10,25 - 8}{4} = 56,25\%$

- c) Schattenfläche wird trapezförmig. Zwar wird die Höhe des Trapezes immer größer, das von der Sonne beschienene Dreieck auf der Westseite wächst jedoch schneller, daher nimmt die Schattenfläche im Tagesverlauf ab. Steht die Sonne im Westen, wird die gesamte Terrasse beschienen.
- d) Z.B. muss der Punkt $P(0|12|3)$ (hintere obere Ecke der Garage) noch im Schatten liegen. Der entsprechende Eckpunkt der Markise Q hat die Koordinaten $(0|q_2|6)$ und liegt auf der durch den Sonnenstrahl durch P gegebenen Geraden

$$s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$3 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -0,75 \Rightarrow q_2 = 9,75 \Rightarrow$ Man muss die Markise um mindestens $9,75 - 8 = 1,75$ [m] ausfahren können.

168/7 Silbermine

$$a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n}_E \circ \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0,5 \end{pmatrix} = 8 \Rightarrow E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 - \underline{8} = 0$$

(falsche Angabe im Lehrbuch!)

$$b) (4|0|0) \in E \text{ und } (4|0|0) \in F \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{n}_F = 0 \Rightarrow$$

Beh. s liegt in der x_1 - x_3 -Ebene im Abstand $\frac{4}{3}$ vom Ursprung.

- c) E: $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|-8|0)$, $S_3(0|0|2)$,
 F: $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|2)$,
 g: $S_{12}(4|0|0)$, $S_{23}(0|0|2)$

$$d) \text{Stollen: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A'(2|1|0,5),$$

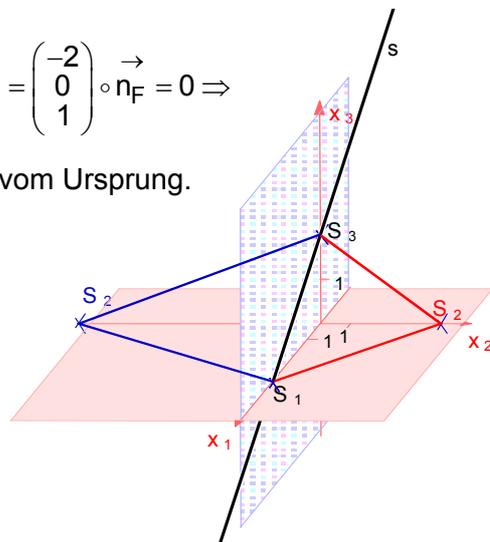
Länge des Stollens: 3 LE

$$e) BC: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P(2|-4|0)$$

$p_3 < a_3 \Rightarrow$ Weg führt bergauf.

$p_1 = a_1 \Rightarrow$ West-Ost-Richtung, $p_2 < a_2 \Rightarrow$ Weg von Westen nach Osten,

$$\overline{PA} \approx 2,06 \text{ LE} \cdot \cos(90^\circ - \phi) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}}{\sqrt{4,25}} \Rightarrow \phi \approx 14^\circ$$



f) Lotebene zu BC durch A: $x_1 + 2x_2 + 2 = 0$, $L(2,8|-2,4|0)$,

$$\overline{LA} = \sqrt{\begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix}^2} \approx 1,02[\text{LE}], \quad \cos(90^\circ - \phi) = \frac{\begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1,05}} \Rightarrow \phi \approx 29,2^\circ$$

169/8 Das Reflexionsgesetz

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $r_3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow R(2|4|0)$

b) $\vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

l, g, g' enthalten den Punkt R und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} = -\frac{2}{3}, \quad \cos \alpha' = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow |\alpha| = |\alpha'|$$

d) Z.B. betrachte die durch \vec{u} , \vec{u}' und R festgelegte Ebene. Die Gerade l liegt in dieser Ebene und l ist Lot zur Winkelhalbierenden $w(\vec{u}, \vec{u}')$, der Symmetrieachse zu \vec{u} , \vec{u}' , die in der Reflexionsebene liegt.

170/9 Der Farbraum

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rot, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ grün, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ blau, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schwarz, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ dunkelblau, $\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ violett,
 $\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,8 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ türkis, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ weiß, $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ grau

b) Würfeldiagonale von $(0|0|0)$ nach $(1|1|1)$; $l: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $0 \leq k \leq 1$, $k = 0,9 \dots 0,1$

c) $gr = 0,3p + 0,6p + 0,1p = p$

d) $gr(\text{rot}) = 0,3 \rightarrow$ oben rechts; $gr(\text{grün}) = 0,6 \rightarrow$ Mitte rechts ;
 $gr(\text{blau}) = 0,1 \rightarrow$ oben links

e) z.B. $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$E_{gr=0,5}: 0,3x_1 + 0,6x_2 + 0,1x_3 = 0,5$, $E_{gr}: 0,3x_1 + 0,6x_2 + 0,1x_3 = gr$ mit $0 \leq gr \leq 1$

f) Alle Sektoren müssen den gleichen Grauwert haben

$\Rightarrow 0,3r = 0,6g = 0,1b = gr$ mit $0 \leq r, g, b, gr \leq 1$

\Rightarrow z.B. $b = gr$, $g = \frac{1}{6}gr$, $r = \frac{1}{3}gr$

10.2 Untersuchungen von Körpern

172/1 Würfel mit einbeschriebenem Tetraeder

a) $V_{\text{Würfel}} = 64 \text{ cm}^3$
 $a = 4 \text{ cm} \Rightarrow B(4|0|0), D(0|4|0), E(0|0|4), G(4|4|4)$
 $\Rightarrow V = \frac{1}{6} \left| \vec{BG} \circ \left(\vec{BD} \times \vec{BE} \right) \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = \frac{64}{3} [\text{cm}^3]$

$\Rightarrow 33\frac{1}{3}\%$ des Würfelvolumens (einfacher: Von dem Würfel werden vier Tetraeder abgeschnitten, die jeweils $\frac{1}{6}$ des Würfelvolumens einnehmen.)

b) $O_{\text{Würfel}} = 96 \text{ cm}^2$: Das Tetraeder besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge $s = 4\sqrt{2} \text{ cm}$.

$$\Rightarrow O_{\text{Tetraeder}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4\sqrt{2})^2 = 32\sqrt{3} [\text{cm}^2] \Rightarrow O_{\text{Tetraeder}} \approx 57,7\% \text{ von } O_{\text{Würfel}}$$

c) E_a sind parallel zur Grundfläche BDE des Tetraeders, gemeinsame Punkte für $4 \leq a \leq 12$

d) $M_{[BG]}(4|2|2), M_{[DG]}(2|4|2), M_{[EG]}(2|2|4) \in E_8$.

Strahlensatz $\Rightarrow V = \frac{1}{8} V_{\text{BDEG}}$

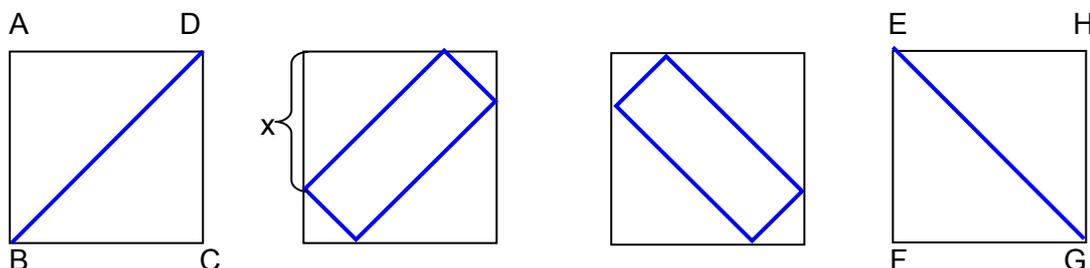
e) F_a verlaufen parallel zur Grundfläche ABCD.

$a = 0$

$0 < a < 2$

$2 < a < 4$

$a = 4$



Schnittkanten sind parallel zu EG oder zu BD (und damit zu FH) und $EG \perp FH$.

Pythagoras $\Rightarrow u = 2x\sqrt{2} + 2(4-x)\sqrt{2} = 8\sqrt{2} [\text{cm}]$ unabhängig von x .

f) Das Rechteck hat seine maximale Fläche, wenn es ein Quadrat wird.

$$\Rightarrow x = 4 - x = 2 [\text{cm}] \Rightarrow (\text{Pythagoras}) F_{\text{max}} = (2\sqrt{2})^2 = 8 \text{ cm}^2.$$

173/2 Würfel mit einbeschriebener Kugel

a) 52,4 %

b) $M_{\text{Kugel}}: M(5|5|5), DF: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{Q}, \vec{R} = \vec{M} \pm 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q \left(5 + \frac{5}{\sqrt{3}} / 5 - \frac{5}{\sqrt{3}} / 5 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \approx (7,9 / 2,1 / 7,9),$$

$$R(2,1|7,9|2,1)$$

c) Grundfläche: gleichseitige Dreiecke,
 Seitenflächen: gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke

d) S: $x_1 - x_2 + x_3 - 16 = 0$

e) M in HNF(S): $\frac{1}{\sqrt{3}}(5 - 5 + 5 - 16) = -\frac{11}{\sqrt{3}} \approx -6,35 < -5 \Rightarrow d(M;S) > r$

f) $\Delta V = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{256}{3} = 85 \frac{1}{3} [\text{cm}^3]$

$$\Delta O = 8 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{2})^2 \right) = 192 - 64\sqrt{3} \approx 81,1 [\text{cm}^2]$$

173/3 Ein Schnitt durch ein Oktaeder

a) $\phi = 60^\circ$ (sämtliche Seitendreiecke sind gleichseitig)

b) z.B. Kante [AF] und Seitenfläche ADE: $\vec{AF} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\vec{n}_{ADE} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \sin \phi = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \kappa \approx 125,3^\circ$$

c) alle Winkel zwischen den Seitenflächen sind gleich groß, z.B.

$$\vec{n}_{ADF} = \vec{AD} \times \vec{AF} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n}_{ABF} = \vec{AB} \times \vec{AF} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{n}_{ADF} \cdot \vec{n}_{ABF}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \phi \approx 109,5^\circ$$

d) 8 gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge $l = a\sqrt{2} \Rightarrow O = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (a\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{3}a^2$

Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge $l = a\sqrt{2}$) und Höhe

$$a \Rightarrow V = \frac{2}{3} (a\sqrt{2})^2 \cdot a = \frac{4}{3} a^3$$

e) $M_{[AD]} \left(\frac{a}{2} / -\frac{a}{2} / 0 \right)$, $M_{[AE]} \left(\frac{a}{2} / 0 / -\frac{a}{2} \right)$, $M_{[BC]} \left(-\frac{a}{2} / \frac{a}{2} / 0 \right)$, $M_{[BE]} \left(0 / \frac{a}{2} / -\frac{a}{2} \right)$,
 $M_{[CF]} \left(-\frac{a}{2} / 0 / \frac{a}{2} \right)$, $M_{[DF]} \left(0 / -\frac{a}{2} / \frac{a}{2} \right)$; Einsetzen in E \Rightarrow Beh.

f) alle Seiten haben die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und Winkel zwischen den Seiten $\phi = 120^\circ$

$$F_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{2}\sqrt{2} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2, F_{\text{Dreieck}} = \frac{\sqrt{3}}{4} (a\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

\Rightarrow Sechseck ist um 50% größer als die Seitendreiecke.

g) E ist parallel zur Ebene E(ABF) $\Rightarrow \phi \approx 180^\circ - 109,5^\circ = 70,5^\circ$ (vgl. Teilaufgabe c)

h) K: $\vec{X}^2 = \frac{a^2}{2}$

10.3 Trainingsaufgaben für das Abitur

174/1 Ein Grundlagen-Test

a) A, denn $\left| \vec{AB} \right| = \left| \vec{BC} \right| = 6\sqrt{2}$; B, denn $\vec{AB} \circ \vec{BC} = 0$

C falsch, denn $\left| \vec{AB} \right| \neq \left| \vec{AC} \right| = 12$

b) C, denn $\vec{AD} \parallel \vec{BC}$, aber nicht $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$

c) A, denn $\triangle ABC$ ist gleichseitig mit $s = 4\sqrt{2}$, $E(ABC): x_1 + x_2 + x_3 - 14 = 0$

$\Rightarrow S$ in HNF(E): $\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3 - 14) = 0 \Rightarrow d(S;E) = 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot (4\sqrt{2})^2 \right) \cdot 6\sqrt{3} = 48$

oder (Merkhilfe): $V = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} \right] \right| = 48$

d) B, C, denn $\sqrt{6480} = \sqrt{36^2 \cdot 5}$

e) A falsch, denn $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ in AB liefert $\lambda = -2$.

B, denn $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$; C falsch, denn $\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$

f) B; A falsch, Wert $\hat{=} \sin \alpha$

C falsch, da Winkel zwischen Geraden nie größer als 90°

g) B, denn $\vec{n}_E \neq \lambda \cdot \vec{v}_g \Rightarrow g$ nicht senkrecht auf E und $\vec{n}_E \circ \vec{v}_g \neq 0 \Rightarrow E$ und g sind nicht parallel

h) B, denn $\vec{n}_E = \lambda \cdot \vec{v}_g \Rightarrow g \perp E$ i) C, denn $\vec{n}_E \circ \vec{n}_F \neq 0$ und $\vec{n}_E \neq \lambda \cdot \vec{n}_F$

k) C, denn $\vec{w}_F = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}_E$ l) A (und damit auch B mit Abstand 0)

m) C, denn HNF(E): $\frac{1}{9}(x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 6) = 0$

n) A, C; B falsch, denn $r_K = \sqrt{3}$

o) B, denn $M_K(6|-1|9)$ und $d(M_K/E) = 9$

175/2 Lagebeziehungen

a) S (1|4|9)

b) S (-3,5|-5|0)

c) S (-1|-2|1)

d) s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e) s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

175/3 „Ebenen-TÜV“

- a) $\vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow A, B$ und C liegen auf einer Geraden, sie spannen also keine Ebene auf.
- b) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{QR} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{PQ}, \vec{QR}$ linear unabhängig
 z. B. $E(PQR): \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- c) $P \notin g \Rightarrow P$ und g spannen eine Ebene auf; z. B. $E(Pg): \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- d) $P \notin g \Rightarrow P$ und g spannen eine Ebene auf; z. B. $E(Pg): \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- e) $\vec{v}_h = -3\vec{v}_g \Rightarrow g \parallel h$, Aufpunkt von h nicht auf $g \Rightarrow g \neq h$
 z. B. $E(gh): \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- f) g und h sind windschief $\Rightarrow g$ und h legen keine Ebene fest.

176/4 Winkelberechnungen

- a) $\cos \angle(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \angle(\vec{u}; \vec{v}) \approx 109,5^\circ$
- b) $\cos \angle(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \angle(\vec{u}; \vec{v}) \approx 109,5^\circ \Rightarrow \angle(g; h) = 180^\circ - 109,5^\circ = 70,5^\circ$
- c) $\cos \angle(E_1; E_2) = 0 \Rightarrow \angle(E_1; E_2) = 90^\circ$
- d) $\cos(90^\circ - \angle(E; g)) = \sin \angle \left(\begin{matrix} \vec{n}_E \\ \vec{v}_g \end{matrix} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \angle(E; g) \approx 63,4^\circ$

176/5 Abstandsprobleme

- a) $HNF(E): d(P; E) = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2) \Rightarrow d(P; E) = 9$
- b) Q beliebig auf g
 $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + 2\lambda \\ -9 - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow d^2 = 4 + 9 + 12\lambda + 4\lambda^2 + 81 + 18\lambda + \lambda^2 = 5\lambda^2 + 30\lambda + 94$
 $(d^2)'(\lambda) = 10\lambda + 30 = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow Q(8 / -4 / 3)$
 $d(P; g) = \left| \vec{PQ} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$
- c) $\vec{v}_g = -2\vec{v}_h \Rightarrow g \parallel h$
 P Stützpunkt von h , Q auf g beliebig
 $\Rightarrow \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ -7 + 10\lambda \\ 6\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow d^2 = 140\lambda^2 - 140\lambda + 49$

$$(d^2)'(\lambda) = 280\lambda - 140 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow Q(2; -2; 6)$$

$$d(P; g) = \left| \vec{PQ} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \approx 3,74$$

- d) $\vec{v}_g \neq k \vec{v}_h \Rightarrow g$ und h nicht parallel, kein Schnittpunkt $\Rightarrow g$ und h sind windschief
 Ebene E aus g und dem Richtungsvektor von h : $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$
 Stützpunkt von h in HNF(E) $\Rightarrow d = \frac{10}{3}$

176/6 Ein Steigflug nach dem Start

- a) Start 200 m nördlich des Towers, Steigrate $4 \frac{m}{s}$

b) $v = \begin{pmatrix} 32 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} = 36 [m]$, $v_h = 4 \frac{m}{s}$, Flugzeit: 25 s, Höhe nach 25 s Flugzeit: 100 m

c) Start: $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ -10 \end{pmatrix} \approx 200,25 [m]$,

$$d^2 = \begin{pmatrix} 32t \\ 200 - 16t \\ -10 \end{pmatrix}^2 = 1296t^2 - 6480t + 40100 \Rightarrow (d^2)' = 2592t - 6480 = 0$$

$\Rightarrow t = 2,5 \Rightarrow$ geringste Entfernung von der Spitze des Towers bei $t = 2,5$ s,

$$h = 10m, \text{ minimale Entfernung: } d = \sqrt{80^2 + 160^2} \approx 178,9 [m]$$

177/7 Würfelschnitte

a) $E_1: x_1 - x_2 + x_3 - 8 = 0$

b) $\triangle EBG$ ist gleichseitig mit $s = 4\sqrt{2} \Rightarrow A(\triangle EBG) = 32\sqrt{3}$

$$\text{HNF}(E_1) \Rightarrow d(F; E_1) = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

$$V_{EBGF} = \frac{1}{3} \cdot 32\sqrt{3} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{3} = \frac{256}{3} \approx 16,7\% \text{ des}$$

Würfelvolumens

c) $\cos \phi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi \approx 54,7^\circ$

z. B. A, B, G (bzw. H) oder A, D, F (bzw. G)

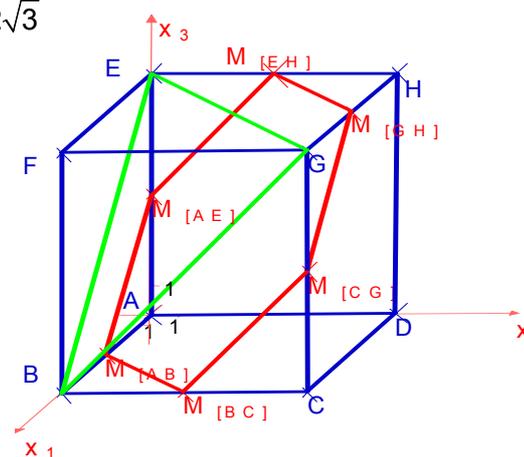
d) $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 \Rightarrow E_2 \parallel E_1$

z. B. B in HNF(E_2) $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(-8 + 4) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

e) $S_1(4|0|0)$, $S_3(0|0|4)$, $M_{[BC]}(8|4|0)$ in $E_1: -8 + 4 - 0 + 4 = 0 \Rightarrow M_{[BC]} \in E_2$

Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge

$$s = 4\sqrt{2} \Rightarrow A = 6 \cdot \frac{(4\sqrt{2})^2}{4} \sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$



- f) Sechseck für $0 < a < 8$
 Dreieck für $-8 < a \leq 0$ oder $8 \leq a < 16$
 Ein Punkt für $a = 16$ oder $a = -8$

177/8 Kugel auf der schiefen Ebene

a) siehe rechts

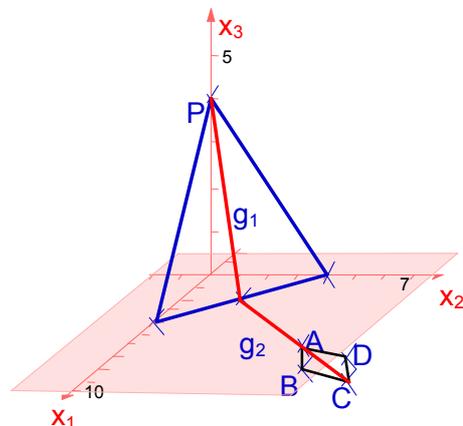
b) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \sqrt{5},$
 $\vec{AB} \circ \vec{AD} = 4 \neq 0 \Rightarrow ABCD$ ist eine Raute
 $A_{ABCD} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \sqrt{18} \sqrt{2} = 3$

d) $M_{[AC]} = M_{[BD]}(7,5 / 7,5 / 0) \in g_2 \Rightarrow$ Die Kugel rollt in das Loch.

$\overline{BD} = \sqrt{2} < d_K = 2 \Rightarrow$ Die Kugel fällt nicht durch das Loch.

$$t = 1 - \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,29 [\text{cm}]$$



178/9 Decken eines Walmdachs

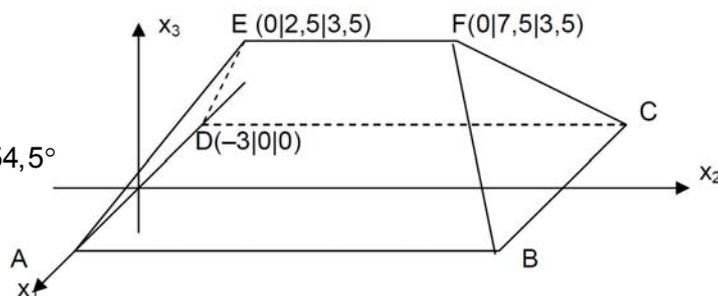
a) Siehe Abb.

b) dreieckige Dachfläche:

$$\cos \phi_1 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -21 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-21)^2 + 15^2} \cdot 1} \Rightarrow \phi_1 \approx 54,5^\circ$$

trapezförmige Dachfläche:

$$\cos \phi_2 = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{7^2 + 6^2} \cdot 1} \Rightarrow \phi_2 \approx 49,4^\circ \neq \phi_1$$



c) $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot \phi_2 \approx 81,2^\circ;$ $\vec{n}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ -3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}, \vec{n}_T = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi \approx 67,8^\circ$

d) Voraussetzung: Ziegel sind beliebig teilbar.

$$F_{\Delta AED} = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -21 \\ 15 \end{pmatrix} \right| \approx 12,9 [\text{m}^2],$$

$$h_{\text{Trapez}} = \frac{3,5}{\sin \phi_2} \Rightarrow F_{\text{Trapez}} = \frac{10+5}{2} \cdot \frac{3,5}{\sin \phi_2} \approx 35,6 [\text{m}^2]$$

$$F_{\text{Dach}} = 2 \cdot (F_{\Delta AED} + F_{\text{Trapez}}) \approx 94,9 \text{m}^2 \Rightarrow \text{Es sind 1140 Ziegel nötig}$$

e) Anzahl der Firstziegel: $n = 2,8 \cdot (\overline{EF} + 4\overline{AE}) = 2,8 \cdot \left(5 + 4 \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \right| \right) \approx 73$

f) $g_{EF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, S \in g_{EF} \text{ mit } 0 < \lambda < 5$

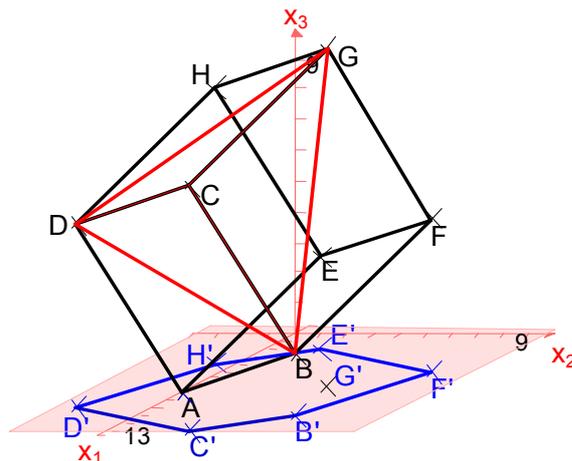
$$\vec{SA} \circ \vec{SB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2,5 - \lambda \\ -3,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 10 - 2,5 - \lambda \\ -3,5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \approx 4,44 \in [0; 5], \lambda_2 \approx 0,56 \in [0; 5]$$

$$S_1(0|5 - \frac{\sqrt{15}}{2}|3,5) \approx S_1(0|3,06|3,5), S_2(0|5 + \frac{\sqrt{15}}{2}|3,5) \approx S_2(0|6,94|3,5)$$

178/10 Würfelstumpf

- a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{AE} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AE}$ und AB, AD, AE paarweise senkrecht aufeinander
 C(13|3|8), F(5|8|5), G(7|5|11), H(4|-1|9)
- b) Siehe Abb.
- c) $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AE} = 7 \Rightarrow V = 343$
- e) $V_{Pyr} = \frac{1}{6} V_W \Rightarrow$ Volumen nimmt um 16,7% ab



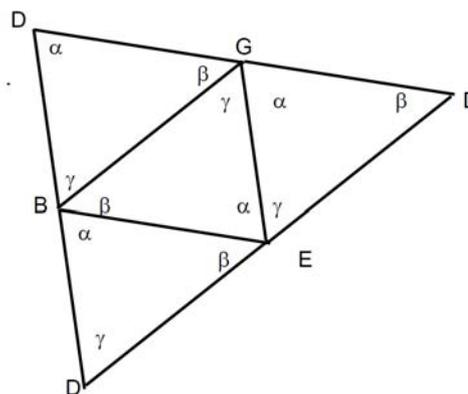
f) $M = M_{[BG]}(9|5,5|6,5) \Rightarrow \cos \phi = \frac{\vec{MD} \circ \vec{MC}}{|\vec{MD}| \cdot |\vec{MC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -8,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}}{\sqrt{73,5} \cdot \sqrt{24,5}} \Rightarrow \phi \approx 54,7^\circ$

179/11 Pyramide im Quader

- a) $\triangle BGE \cong \triangle BDG$, denn $[BG]$ ist Seite beider Dreiecke, $\overline{BD} = \overline{EG}$ und $\overline{BE} = \overline{DG}$ (Diagonalen in gegenüber liegenden Seitenflächen) \Rightarrow Beh.
 Nach SSS-Satz analog für die anderen Seitenflächen der Pyramide
- b) $V_{Pyramide} = V_{Quader} - 4 \cdot V_{BCDG} = abc - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot c = \frac{1}{3} abc \Rightarrow$
 Pyramide nimmt 33,3% des Quadervolumens ein

- c) Siehe Abb.
 Das Netz bildet ein Dreieck.
 Begr.: kongruente Seitenflächen \Rightarrow entsprechende Winkel sind gleich groß (vgl. Netz)
- d) Da die Dreiecke kongruent sind, genügt es, die Fläche eines Dreiecks (z.B. $\square BDG$) zu berechnen.
 Wegen $a = 3, b = 4, c = 5$ gilt: B(3|0|0), D(0|4|0), G(3|4|5)

$$\Rightarrow \vec{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{BG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \left| \vec{BD} \times \vec{BG} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20^2 + 15^2 + (-12)^2} \approx 13,9 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\Rightarrow O_{\text{Pyramide}} \approx 55,5 \text{ cm}^2$$

179/12 Vom Oktaeder zum Oktaederstumpf

a) $-1 < a < 1$

b) $k = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, $V_k = \frac{1}{27}V_g$

c) 6 Quadrate, 8 regelmäßige Sechsecke

$$O = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{2} \right)^2 + 8 \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}^2 \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\sqrt{2} \right)^2 \sqrt{3} \right) = \frac{12}{9} + \frac{8}{3}\sqrt{3} \approx 5,95 \text{ [FE]}$$

d) $\frac{V_{\text{O-Stumpf}}}{V_{\text{Oktaeder}}} = \frac{V_g - 6 \cdot V_k}{V_g} = \frac{7}{9}$

179/13 Geometrisches Gebilde einer Menge von Punkten

a) A) Alle Punkte der Geraden g: $\vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$

B) \vec{u} und \vec{v} zeigen in die gleiche Richtung: Strecke mit den Endpunkten A und B, wobei $\vec{B} = \vec{A} + \vec{u} + \vec{v}$.

\vec{u} und \vec{v} zeigen in entgegengesetzte Richtung: Strecke mit den Endpunkten C und D, wobei $\vec{C} = \vec{A} + \vec{u}$ und $\vec{D} = \vec{A} + \vec{v}$.

b) A) Alle Punkte der Ebene E: $\vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, „Parallelogrammnetz“

B) Parallelogramm ABCD mit $\vec{B} = \vec{A} + \vec{u}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{D} = \vec{A} + \vec{v}$

c) A) \vec{u} , \vec{v} linear unabhängig und gleich lang.

B) $\vec{u} \perp \vec{v}$

C) $\vec{u} \perp \vec{v}$ und \vec{u} , \vec{v} gleich lang.