9 Ebenengleichungen

9.1 Parameterform der Ebenengleichung

140/1 Vom Parallelogrammnetz zur Ebenengleichung

a) $\vec{B}=\vec{A}+\vec{u}\Rightarrow B(2/4/3)$; $\vec{D}=\vec{A}+2\vec{u}\Rightarrow D(3/6/3)$

$\vec{C}=\vec{A}+\vec{v}\Rightarrow C(1/4/4)$; $\vec{F}=\vec{A}+2\vec{v}\Rightarrow F(1/6/5)$

$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $h:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; für $\lambda,\mu\in Z$

b) $\vec{G}=\vec{A}+\vec{u}+\vec{v}\Rightarrow G(2/6/4)$; $\vec{H}=\vec{A}+\vec{u}+2\vec{v}\Rightarrow H(2/8/5)$

c) $E:\overrightarrow{0X}=\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

140/2 Von der Parametergleichung zur Punktmenge

a)

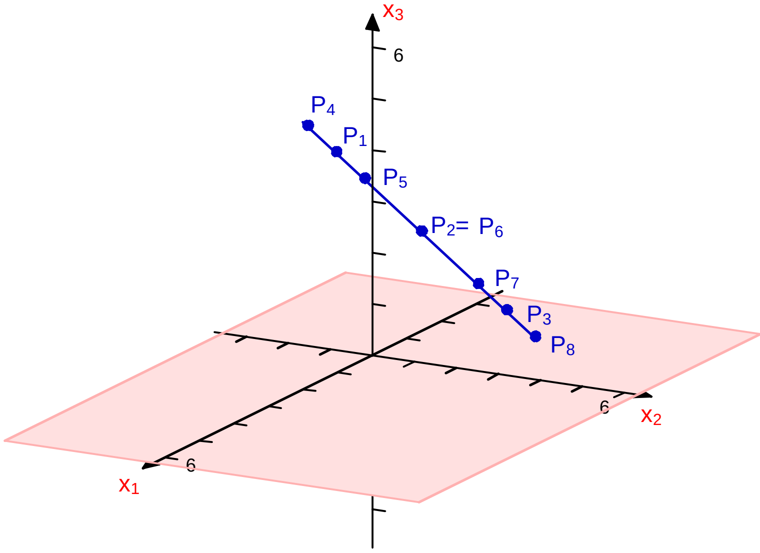
$\lambda=0$ und $\mu=-1\Rightarrow P_1(-2/-2{,}5/3)$; $\lambda=0$ und $\mu=0\Rightarrow P_2(1/2/3)$;

$\lambda=0$ und $\mu=1\Rightarrow P_3(4/6{,}5/3)$; $\lambda=-2$ und $\mu=0\Rightarrow P_4(-3/-4/3)$;

$\lambda=-1$ und $\mu=0\Rightarrow P_5(-1/-1/3)$; $\lambda=0$ und $\mu=0\Rightarrow P_6(1/2/3)=P_2$;

$\lambda=1$ und $\mu=0\Rightarrow P_7(3/5/3)$; $\lambda=2$ und $\mu=0\Rightarrow P_8(5/8/3)$

b)



c) Ist ein Parameter gleich Null, so spielt der entsprechende Richtungsvektor keine Rolle, übrig bleibt nur eine Geradengleichung, die einzelnen Punkte liegen also jeweils auf einer Geraden.

$P_1,P_2,P_3\in h:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\4{,}5\\0\end{pmatrix}$; $P_4,P_5,P_6,P_7,P_8\in g:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$;

Allerdings sind in diesem Fall die beiden Geraden identisch, da die beiden Richtungsvektoren der Angabe linear abhängig sind. Also stellt die gesamte Gleichung keine Ebenengleichung sondern "nur" eine Geradengleichung dar!

Alle Punkte liegen auf einer Geraden, die parallel zur x_1x_2-Ebene liegt, da der x_3-Wert stets gleich 3 ist (vgl. 2b).

140/3

a) $E:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$; z.B. $P_1(2/-1/10)$; $P_2(3/2/6)$; $P_3(5/1/9)$

b) $E:\vec{X}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\11\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}$; z.B. $P_1(-1/-3/11)$; $P_2(-2/-6/15)$; $P_3(0/0/7)$

140/4 Punkt in der Ebene?

a) P liegt in der Ebene

$$\begin{array}{lrrrrl} \text{I)} & -1 & +\lambda & -2\mu = & -1 & \Rightarrow \lambda = 2\mu \quad \text{in II)} \\ \text{II)} & 1 & -2\lambda & +3\mu = & 0 & \Rightarrow \mu = 1;\ \lambda = 2 \quad \text{in III)} \\ \text{III)} & 2 & +3\lambda & -4\mu = & 4 & \Rightarrow 2+6-4=4 \quad (\text{w}) \end{array}$$

Q liegt in der Ebene

$$\begin{array}{lrrrrl} \text{I)} & -1 & +\lambda & -2\mu = & -5 & \Rightarrow 2\mu = 4+\lambda \quad \text{in III)} \\ \text{II)} & 1 & -2\lambda & +3\mu = & 8 & \Rightarrow 1+4+3=8 \quad (\text{w}) \\ \text{III)} & 2 & +3\lambda & -4\mu = & -8 & \Rightarrow \lambda = -2;\ \mu = 1 \quad \text{in II)} \end{array}$$

R liegt nicht in der Ebene

$$\begin{array}{lrrrrl} \text{I)} & -1 & +\lambda & -2\mu = & 0 & \Rightarrow \lambda = 1+2\mu \quad \text{in II)} \\ \text{II)} & 1 & -2\lambda & +3\mu = & -1 & \Rightarrow \mu = 0;\ \lambda = 1 \quad \text{in III)} \\ \text{III)} & 2 & +3\lambda & -4\mu = & 1 & \Rightarrow 2+3-0=1 \quad (\text{f}) \end{array}$$

S liegt in der Ebene

$$\begin{array}{lrrrrl} \text{I)} & -1 & +\lambda & -2\mu = & -3 & \Rightarrow \lambda = 2\mu-2 \quad \text{in II)} \\ \text{II)} & 1 & -2\lambda & +3\mu = & 5 & \Rightarrow \mu = 0;\ \lambda = -2 \quad \text{in III)} \\ \text{III)} & 2 & +3\lambda & -4\mu = & -4 & \Rightarrow 2-6=-4 \quad (\text{w}) \end{array}$$

b) Nicht in E liegen beispielsweise: $P_1(2/2/0)$; $P_2(1/0/0)$; $P_3(0/0/0)$

141/5 Ebene durch drei Punkte

a) z.B.: Stützpunkt: A, Richtungsvektoren: Verbindungsvektoren der Punkte A und B und der Punkte B und C $\Rightarrow$ $E:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}$

b) Man wählt einen der drei Punkte als Stützpunkt und zwei beliebige Verbindungsvektoren der drei Punkte als Richtungsvektoren.

c) $E(PQR):\vec{X}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\10\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}+\lambda'\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}+\mu'\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

d) Die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig, die drei Punkte S, T, U liegen also auf einer Geraden und legen daher keine Ebene eindeutig fest.

$E(STU):\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda'\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

141/6 Ebene durch eine Gerade und einen Punkt

a) Man kann Stützpunkt A und Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g übernehmen und als zweiten Richtungsvektor den Verbindungsvektor des Punktes P mit dem Stützpunkt A der Geraden g wählen.

b) $E(Pg): \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $E(Pg): \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) Es funktioniert nicht, wenn der Punkt P auf der Geraden g liegt, beispielsweise für: $P(2/1/1)$; $\quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

141/7 Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

a) Man kann Stützpunkt A und Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g übernehmen und als zweiten Richtungsvektor den Richtungsvektor $\vec{v}$ der zweiten Geraden h wählen.

b) $E(gh): \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $E(gh): \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

142/8 Ebene durch zwei parallele Geraden

a) Man kann Stützpunkt A und Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g übernehmen und als zweiten Richtungsvektor den Verbindungsvektor des Punktes A mit dem Stützpunkt B der Geraden h wählen.

b) $E(gh): \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $E(gh): \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

142/9 Lineare Abhängigkeit

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \lambda = -2 \quad \underset{\text{in I, III}}{\Rightarrow} \mu = 6 \quad \underset{\text{in III}}{\Rightarrow} 6 = -4 - 6 \quad (f)$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \lambda = 2 \quad \underset{\text{in I, III}}{\Rightarrow} \mu = -2 \quad \underset{\text{in III}}{\Rightarrow} 6 = 4 + 2 \quad (w)$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear abhängig: $\quad \vec{w} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

c) $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \lambda = 7 + 3\mu \quad \underset{\text{in II}}{\Rightarrow} \mu = -2,\ \lambda = 1 \quad \underset{\text{in III}}{\Rightarrow} -1 = 3 - 4 \quad (w)$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear abhängig: $\quad \vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$

d) $\begin{pmatrix}-3\\6\\-9\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow 2\lambda=-3-5\mu\quad\stackrel{\text{in II}}{\Rightarrow}\mu=0,\ \lambda=-1{,}5\quad\stackrel{\text{in III}}{\Rightarrow}-9=-9\quad(\text{w})$

$\Rightarrow \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ linear abhängig: $\quad\vec{w}=-1{,}5\vec{u}+0\vec{v}=-1{,}5\vec{u}$

142/10 Grundwissen: Vektorprodukt

a) $\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}6\\3\\-6\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-3\\-6\\-3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

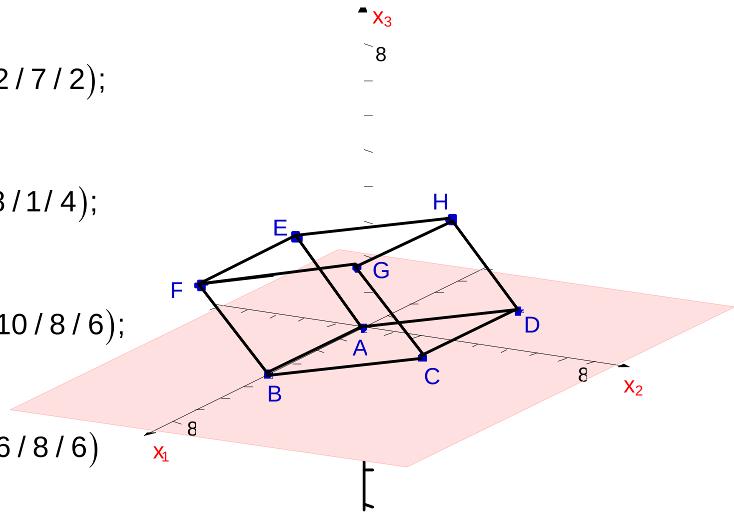
142/11 Grundwissen: Der Spat

a) $\vec{D}=\vec{A}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\7\\2\end{pmatrix}\Rightarrow D(2/7/2);$

$\vec{F}=\vec{B}+\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}\Rightarrow F(8/1/4);$

$\vec{G}=\vec{F}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\7\\2\end{pmatrix}\Rightarrow G(10/8/6);$

$\vec{H}=\vec{E}+\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\7\\2\end{pmatrix}\Rightarrow H(6/8/6)$



b) $A_{\text{Parallelogramm}_{ABCD}}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\7\\2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-8\\28\end{pmatrix}\right|=\sqrt{848}\approx 29{,}12\ [\text{FE}]$

c) $V_{\text{Spat}}=\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\circ\overrightarrow{AE}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-8\\28\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}\right|=104\ [\text{VE}]$

9.2 Normalenform der Ebenengleichung

145/1 Normalenform und Koordinatenform

a) E: $\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)=0\Rightarrow 2x_1-3x_2+4x_3-10=0$, $P\in E, Q\notin E, R\in E$

weiterer Punkt z.B. S(5|0|0)

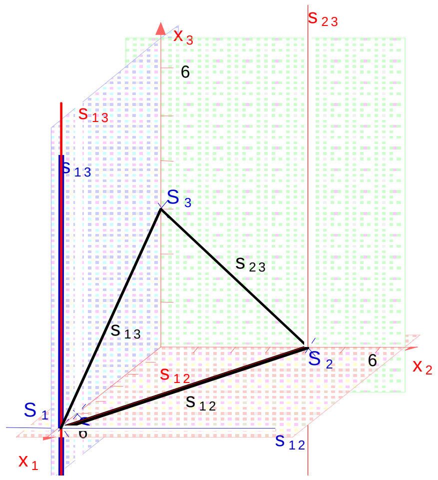
b) E: $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}\right)=0\Rightarrow 3x_1+2x_2+4=0$, $P\notin E, Q\notin E, R\in E$

weiterer Punkt z.B. S(0|0|–2)

c) E: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)=0\Rightarrow x_3-1=0$, $P\in E, Q\in E, R\in E$

weiterer Punkt z.B. S(0|0|1)

145/2 Eine Ebene hinterlässt Spuren



a) $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = 6$

b) $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|3)$

c), e), f) s. rechts

d) S_1, S_2 können übernommen werden, für S_3 keine Lösung.

e) s_{12} kann übernommen werden, s_{13} und s_{23} verlaufen parallel zur x_3-Achse.

f) $S_1(6|0|0)$

145/3 Spurpunkte und Spurgeraden gesucht

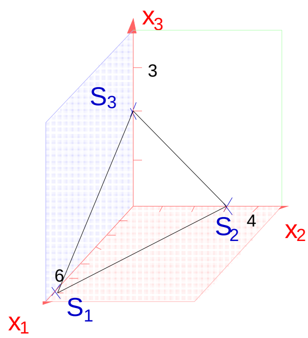
a) $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|3|0)$, $S_3(0|0|2)$,

$$s_{12}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$s_{13}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$s_{23}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix},$$

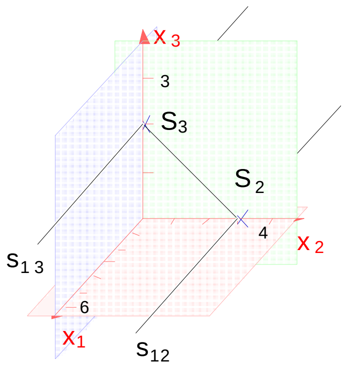
$$E\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$



b) $S_2(0|3|0)$, $S_3(0|0|2)$,

$$s_{12}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ s_{13}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

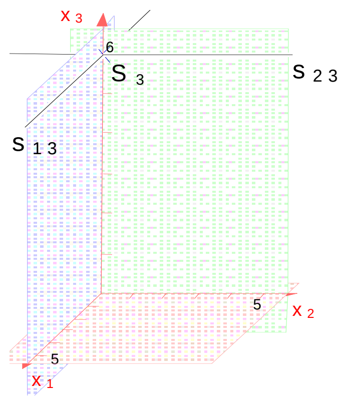
$$s_{23}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix},\ E\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$$



c) $S_3(0|0|2)$,

$$s_{13}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ s_{23}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$E\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

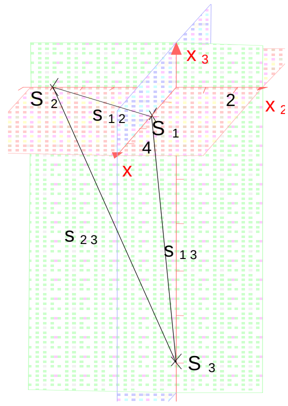


d) $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|–4|0)$, $S_3(0|0|–6)$,

$$s_{12}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad s_{13}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},$$

$$s_{23}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix},$$

$$E\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

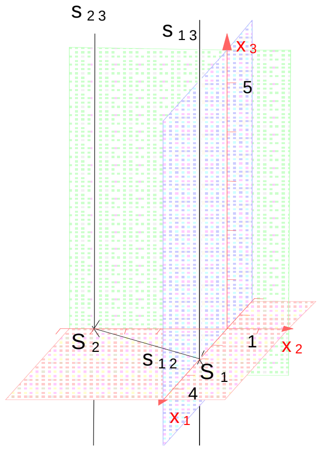


e) $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|–4|0)$,

$$s_{12}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad s_{13}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$s_{23}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$E\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

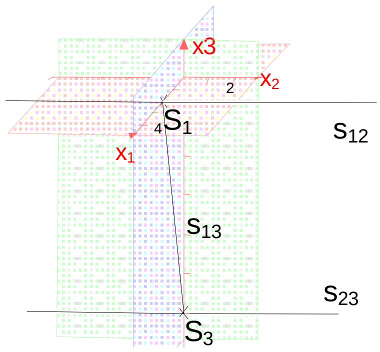


f) $S_1(2|0|0)$, $S_3(0|0|–6)$,

$$s_{12}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad s_{13}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},$$

$$s_{23}\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$E\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$



145/4 Spurpunkte gegeben

a) z.B. E: $42x_1 + 35x_2 + 30x_3 – 210 = 0$

b) z.B. E: $x_1 + x_2 + x_3 – 3 = 0$

c) z.B. E: $–x_1 + x_2 – 1 = 0$

d) z.B. E: $x_3 + 6 = 0$

145/5 Besondere Lage im Koordinatensystem

a) E liegt parallel zur x_1-x_2-Ebene mit Spurpunkt $S_3(0|0|4)$.

b) E ist die x_1-x_2-Ebene.

c) E liegt parallel zur x_1-x_3-Ebene mit Spurpunkt $S_2(0|–5|0)$.

d) E liegt parallel zur x_2-x_3-Ebene mit Spurpunkt $S_1(5|0|0)$.

e) E liegt parallel zur x_3-Achse mit Spurpunkten $S_1(6|0|0)$ und $S_2(0|6|0)$.

f) E liegt parallel zur x_1-Achse mit Spurpunkten $S_2(0|6|0)$ und $S_3(0|0|–6)$.

g) E enthält die x_3-Achse und ist Symmetrieebene zur x_1-Achse und x_2-Achse.

h) E hat die Spurpunkte $S_1(1|0|0)$, $S_2(0|1|0)$ und $S_3(0|0|1)$.

146/ 6 Eine Koordinatenform der Ebene E aufstellen

a) E: $x_3 = 3$ b) E: $x_2 = 4$ c) E: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

d) E: $2x_1 - x_2 - 2x_3 - 1 = 0$ e) E: $x_2 - 3 = 0$ f) E: $x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$

g) E: $x_1 - x_2 + 2x_3 - 9 = 0$

146/7 Umrechnen einer Parameterform in eine Koordinatenform

a) E: $-2x_1 + x_2 + 4x_3 - 9 = 0$ b) E: $x_1 + x_2 - x_3 - 6 = 0$

c) E: $x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$ d) E: $6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 21 = 0$

e) E: $-10x_1 + 58x_2 + 8x_3 - 150 = 0$ f) E: $-4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 1 = 0$

146/8 Umrechnen einer Koordinatenform in eine Parameterform

a) z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ f) z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ h) z.B. E: $\vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

i) z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

146/ 9 Parabelkirche

a) Parabel: $x_3 = -\frac{3}{5}x_2^2 + 15$, Tangente: $x_3 = -6x_2 + 30$, $\phi \approx 80{,}5°$.

b) A(0|5|0), z.B. B(0|0|30)

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 30 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ d) E: $-x_2 + 6x_3 + 5 = 0$

9.3 Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

148/1 Gegenseitige Lage?

a) $g \parallel E$, wenn $\vec{u}_g \perp \vec{n}_E \Leftrightarrow \vec{u}_g \circ \vec{n}_E = 0$,

g in E, wenn zusätzlich ein Punkt auf g auch in E liegt.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \parallel E$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in E \Rightarrow$ g liegt in E.

b) $\vec{v}_h = \vec{v}_g \Rightarrow \vec{v}_h \circ \vec{n}_E = 0$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \notin E \Rightarrow$ h echt parallel zu E.

c) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=6\neq 0\Rightarrow$ l und E haben einen Schnittpunkt.

d) Die Koordinaten von S erfüllen sowohl die Gleichung von g wie auch von E. $\Rightarrow$ Setze die Koordinaten von g in E ein. $\Rightarrow \lambda$

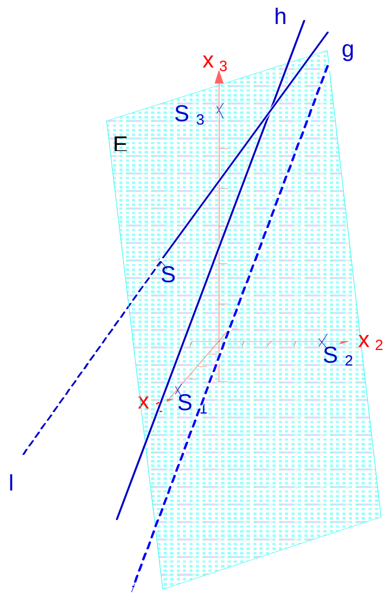
λ in g eingesetzt ergibt S.

g und E: $-2 + 2\lambda + 2(4 - \lambda) + 2 - 8 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ Bedingung für jedes λ erfüllt.

h und E: 6 = 0 Widerspruch $\Rightarrow$ Bedingung für kein λ erfüllt.

l und E: $\lambda = -1 \Rightarrow S(0|3|1)$

149/2 Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene



a), c) $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|6)$

b) $\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix}=0,\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\in E\Rightarrow$ g liegt in E.

$\vec{v}_h=\vec{v}_g\Rightarrow\vec{v}_h\circ\vec{n}_E=0,\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}\notin E\Rightarrow$

h echt parallel zu E.

$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}=-6\neq 0\Rightarrow$ l und E schneiden sich.

S(1|1|3) wegen $\lambda = 1$

149/3 Winkel zwischen Gerade und Ebene

a) $\phi\approx 19{,}5°$ b) $\phi\approx 19{,}5°$

149/4 Neigungswinkel zu den Koordinatenebenen

a) z.B. x_1-x_2-Ebene: $\cos(90°-\phi)=\sin\phi=\left|\dfrac{\vec{v}_g\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{|\vec{v}_g|}\right|$

b) x_1-x_2-Ebene, x_1-x_3-Ebene, x_2-x_3-Ebene jeweils $\phi\approx 35{,}3°$

c) x_1-x_2-Ebene: $\phi\approx 48{,}0°$, x_1-x_3-Ebene: $\phi\approx 33{,}9°$, x_2-x_3-Ebene: $\phi\approx 21{,}8°$

d) x_1-x_2-Ebene: $\phi\approx 54{,}2°$, x_1-x_3-Ebene: $\phi\approx 29{,}1°$, x_2-x_3-Ebene: $\phi\approx 18{,}9°$

149/5 Untersuchung gegenseitiger Lagen

a) g liegt in E. b) g liegt in E.

c) $\lambda = -2 \Rightarrow S(1|-1|1)$, $\phi\approx 32{,}3°$ d) $\lambda = -1 \Rightarrow S(1|-3|2)$, $\phi\approx 55{,}6°$

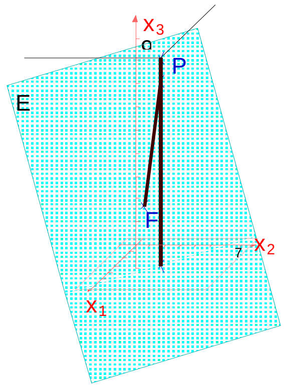
e) E: $7x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 17 = 0$, $\vec{n}_E\circ\vec{v}=0$, $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\in E\Rightarrow$ g liegt in E.

f) E: $2x_1 + x_2 - x_3 - 6 = 0$, $\lambda = 3 \Rightarrow S(3|4|4)$, $\phi = 30°$

150/6 Stromversorgung eines Bergbauernhofs

a) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

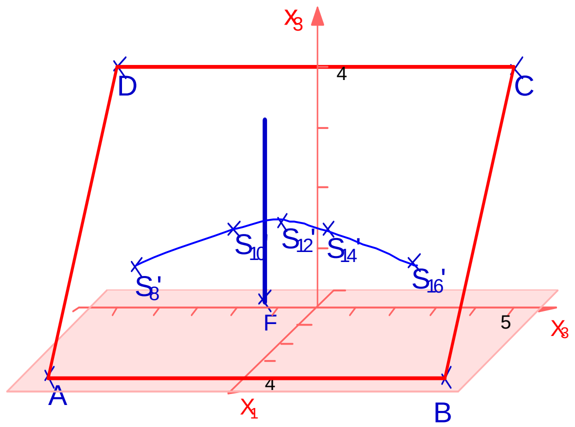
c)



b) $\lambda = -2 \Rightarrow$ F(1|1|2), $\phi \approx 80{,}0°$

150/7 Der wandernde Schatten

a), c)



b) Dachebene D: $x_1 + x_3 - 4 = 0$,

g_8: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{3}{7} \Rightarrow S_8'\left(2\frac{4}{7} / -3\frac{3}{7} / 1\frac{3}{7}\right)$, $\phi \approx 29{,}5°$

g_{10}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{3}{23} \Rightarrow S_{10}'\left(2\frac{2}{23} / -1\frac{4}{23} / 1\frac{21}{23}\right)$, $\phi \approx 55{,}9°$

g_{12}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1 \Rightarrow S_{12}'(2 / 0 / 2)$, $\phi \approx 71{,}6°$

Nimmt man an, dass die Sonne um 12 Uhr am höchsten steht (Achtung: Am 21. Juni gilt die Sommerzeit, also wäre der höchste Sonnenstand um 13.00 Uhr!), so gilt:

g_{14}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{3}{23} \Rightarrow S_{14}'\left(2\frac{2}{23} / 1\frac{4}{23} / 1\frac{21}{23}\right)$, $\phi \approx 55{,}9°$

g_{16}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{3}{7} \Rightarrow S_{16}'\left(2\frac{4}{7} / 3\frac{3}{7} / 1\frac{3}{7}\right)$, $\phi \approx 29{,}5°$

c) Der Schatten bewegt sich zunächst immer langsamer, ab dem Sonnenhöchststand steigt die Geschwindigkeit wieder.

151/8 Quax, der Bruchpilot: He didn't land, he just stopped flying.

a) Heinz: $v_H = 30\,{}^{m}/_{s}$, Quax: $v_Q = 27\,{}^{m}/_{s}$

b) Unterschiedliche Parameter nötig, da die Flugzeuge einen möglicherweise vorhandenen Schnittpunkt zu unterschiedlichen Zeiten erreichen könnten.
S(440|400|80).
Zu einem Zusammenstoß kommt es nur dann, wenn sich beide Flugzeuge zum gleichen Zeitpunkt am Punkt S befinden.

c) $d_{20} = \left|\begin{pmatrix} 120 \\ 60 \\ 15 \end{pmatrix}\right| = 135[\text{m}]$,

$d_{HQ}(t) = \left|\overrightarrow{HQ}(t)\right| = \left|\begin{pmatrix} 800 \\ 580 \\ 125 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -46 \\ -32 \\ -7 \end{pmatrix}\right|$ ergibt unter der Wurzel einen quadratischen Term in t, dessen Minimum ist der gesuchte Zeitpunkt.
$H_{17,6}(387,2|352|70,4)$, $Q_{17,6}(377,6|368,8|72,2)$,
minimaler Abstand: $\overline{H_{17,6}Q_{17,6}} \approx 19,4\text{m} \Rightarrow$ Abstand zwischen den Enden der Flugzeugflügel < 10m.

d) $t = \frac{125}{3}$, Landepunkt L(–200|80|0), $\phi \approx 6,4° \Rightarrow$ harte Landung

151/9 Grundwissen: Viereck und Pyramide

a) AC: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $M \in AC$ (λ = 1,5); BD: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix} -8 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix}$, $M \in BD$ (μ = 0,5);

$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow AC \perp BD$

b) $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4,5 \\ 7,5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7,5 \\ 12,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MC} \Rightarrow$ Teilverhältnis 3 : 5,

$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{MD} \Rightarrow$ Teilverhältnis 1 : 1

c) AC ist Symmetrieachse vom Viereck ABCD, da $\overline{BM} = \overline{DM}$ und $AC \perp BD$. Also ist ABCD ein Drachenviereck.

d) $\overline{AM} = \sqrt{6^2 + 4,5^2 + 7,5^2} = \sqrt{112,5}$, $\overline{BM} = \overline{DM} = \sqrt{(-4)^2 + 9,5^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{112,5}$
$\Rightarrow$ A liegt auf dem Thaleskreis über [BD] $\Rightarrow \angle BAD = 90°$

e) $F_{ABCD} = F_{\Delta BAD} + F_{\Delta BCD} = \frac{8}{3} \cdot 112,5 = 300[\text{FE}]$

f) $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -220 \\ -40 \\ 200 \end{pmatrix} \Rightarrow$ E: $11x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 0$

g) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$, S ergibt sich für λ = –1.

h) $\overline{AS} = \left|\begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = 15 \Rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 300 \cdot 15 = 1500[\text{RE}]$

9.4 Gegenseitige Lage von Ebenen

154/1 Gegenseitige Lage?

a) $E_1 \equiv E_2$: $\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$ und $c_1 = k \cdot c_2$

$E_1 \| E_2$, aber nicht identisch: $n_1 = k \cdot n_2$ und $c_1 \neq k \cdot c_2$

$E_1 \cap E_2 = g$: $\vec{n}_1 \neq k \cdot \vec{n}_2$

b) $\vec{n}_2 = 1{,}5 \cdot \vec{n}_1$, $c_2 \neq 1{,}5 \cdot c_1 \Rightarrow$ Ebenen sind echt parallel.

c) $\vec{n}_2 = 1{,}5 \cdot \vec{n}_1$, $c_2 = 1{,}5 \cdot c_1 \Rightarrow$ Ebenen sind identisch.

d) $\vec{n}_2 \neq k \cdot \vec{n}_1 \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

e) $E_1 \equiv E_2$: $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$, $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ und ein Punkt aus E_2 liegt in E_1.

$E_1 \| E_2$, aber nicht identisch: $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$, $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ und ein Punkt aus E_2 liegt nicht in E_1. $E_1 \cap E_2 = g$: $\vec{n} \circ \vec{u} \neq 0$ oder $\vec{n} \circ \vec{v} \neq 0$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, P(0/0/1) \notin E_1 \Rightarrow E_1 \| E_2$, aber nicht identisch.

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

154/2 Ebenen in Koordinaten- und Parameterform

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, P(1/-2/1) \in E_1 \Rightarrow$ Ebenen sind identisch.

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich in g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -12 \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich in g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1;\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich in g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

154/3 Ebenen in Koordinatenform

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $24 \neq 2 \cdot (-12) \Rightarrow E_1 \| E_2$, aber nicht identisch.

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $-12 = 1{,}5 \cdot (-8) \Rightarrow E_1 \equiv E_2$

c) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich.

z.B. E_1: $\vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\phi \approx 54{,}7°$

d) $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich.

z.B. E_1: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\phi \approx 65{,}9°$

e) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich.

z.B. E_1: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\phi \approx 35{,}3°$

f) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich.

z.B. E_1: $\vec{X} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, g: $\vec{X} = \sigma \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\phi = 60°$

155/4 Ebenen in Parameterform

a) z.B. E_2: $x_1 + x_2 + x3 - 3 = 0$, g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$

b) z.B. E_2: $-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$, g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

155/5 Spuren führen zu Gleichungen

a) E: $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$, F: $x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6 = 0$, s: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

s in E: $3 + 1 - \lambda + \lambda - 4 = 0$, s in F: $3 + 3 - 3\lambda + 3\lambda - 6 = 0$

b) E: $x_2 + x_3 - 2 = 0$, F: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0$, s: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

s in E: $2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 = 0$, s in F: $6 + 2\lambda + 6 + 6\lambda - 8\lambda - 12 = 0$

c) E: $x_3 = 2$, F: $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 12 = 0$, s: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$

s in E: $2 = 2$, s in E: $6\lambda + 6 - 6\lambda + 6 - 12 = 0$

155/6 Bau einer ICE-Trasse

a) E(gP): $\vec{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -30 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$

b) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) E(gP): $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 240 = 0$, $\phi \approx 73{,}4°$

9.5 Abstände

158/1 Abstand eines Punktes von einer Geraden

a) $\lambda = -1$, F(2|0|3), d(P;g) = 3

b) $\lambda = 1$, F(5|6|2), d(P;g) = 7

c) $\lambda = 3$, F(6|–6|4), d(P;g) = $\sqrt{14}$

d) $\lambda = 2$, F(0|0|–2), d(P;g) = 11

158/2 Abstand paralleler Geraden

a) $\overrightarrow{PX} \circ \vec{u} = 0 \Rightarrow X \in g$ mit $PX \perp g \Rightarrow \left|\overrightarrow{PX}\right| = d(P;g)$

b) Alle Punkte $P \in g$ haben von der parallelen Geraden h den gleichen Abstand. $\Rightarrow$ Wähle einen beliebigen Punkt $P \in g$ und verfahre wie bei Aufgabe a).

c) d(g;h): d(P;g) mit P(2|5|5) $\Rightarrow$ $\lambda = -1$, F(0|4|3), d(P;g) = d(g;h) = 3
d(j;l): d(P;j) mit P(0|5|8) $\Rightarrow$ $\lambda = -1$, F(–2|2|2), d(P;j) = d(j;l) = 7

158/3 Flugrouten

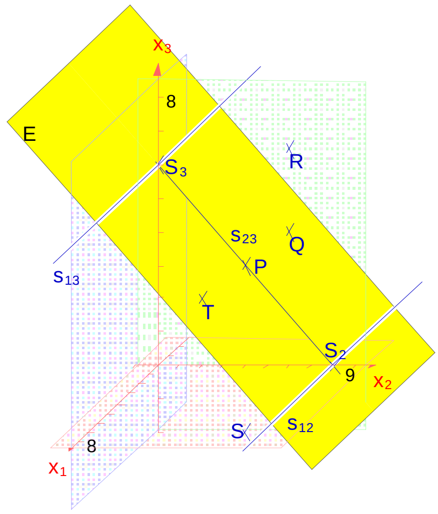
a) $\begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Flugrouten sind zueinander parallel in entgegengesetzte Richtung (etwa Südwest bzw. Nordost). Beide Richtungsvektoren haben die x_3-Koordinate 0. $\Rightarrow$ Beide fliegen parallel zur Erdoberfläche, Flugzeug 1 in einer Höhe von 8 km, Flugzeug 2 in einer Höhe von 10 km.

b) F_1: $\left|\begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{325} \approx 18{,}0\,[\text{km}]$, F_2: $\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{208} \approx 14{,}4\,[\text{km}]$

c) $d_0 = \sqrt{1174} \approx 34{,}3\,[\text{km}]$. Wegen der Monotonie von $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ genügt es, $d^2(t)$ zu untersuchen.

$$d^2(t) = \begin{pmatrix} 10 - 10t - 1 - 8t \\ 15 - 15t + 18 - 12t \\ 8 - 10 \end{pmatrix}^2 = 1053t^2 - 2106t + 1174$$

$$\left(d^2(t)\right)' = 2106t - 2106 = 0 \Rightarrow t = 1\text{min} \Rightarrow d(1) = 11\text{km}$$



159/4 Lage von Punkten zu einer Ebene

a) P: 0, Q: 10, R: 20, S: –20, T: –10

Q und R bzw. S und T im gleichen Halbraum,
Q und T bzw. R und S mit gleichem Abstand zu E.

b) $S_2(0|8|0)$, $S_3(0|0|6)$, E parallel zur x_1-Achse
$\Rightarrow$ kein Spurpunkt S_1.
Alle Punkte liegen in der x_2-x_3-Ebene.
d(R;E) = d(S;E) = 4 LE, d(Q;E) = d(T;E) = 2 LE

c) Die Werte aus a) ergeben sich durch Multiplikation des Abstands mit der Länge des Normalenvektors.

159/5 Abstand eines Punktes von einer Ebene

a) d(O;E) = 2, d(P;E) = 5

b) d(O;E) = 2, d(P;E) = 2

c) d(O;E) = $\frac{1}{3}$, d(P;E) = 2

d) d(O;E) = $\frac{1}{3}$, d(P;E) = 4

e) d(O;E) = $\sqrt{3}$, d(P;E) = $2\sqrt{3}$

f) d(O;E) = 0, d(P;E) = $2\sqrt{3}$

g) d(O;E) = $\sqrt{2}$, d(P;E) = $\sqrt{2}$

h) d(O;E) = 7, d(P;E) = 2

159/6 Abstand einer parallelen Geraden von einer Ebene

a) $\vec{n}_E \circ \vec{u}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \parallel E$.

Da alle Punkte auf g dem gleichen Abstand von E haben, genügt es, den Abstand eines Punktes zu berechnen, z.B. P(3|2|–1). d(P;E) = d(g;E) = $3\sqrt{3}$

b) $\vec{n}_E \circ \vec{u}_g = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ -21 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \parallel E$; d(g;E) = 2

159/7 Abstand windschiefer Geraden

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) E: $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$h \parallel E \Rightarrow$ jeder Punkt $P \in h$ hat den gleichen Abstand von E. Da $\vec{n} \perp g$ und $\vec{n} \perp h$, ist dies auch die kürzeste Entfernung zwischen g und h. d(g;h) = $\frac{7}{3}$

c) E: $-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 23 = 0$; d(g;h) = 18

160/8 Lotfußpunkt und Spiegelpunkt

a) $\vec{u}_l = \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, l: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\lambda = -3$, F(4|3|–2)

c) d(P;E) = 9

d) $\overrightarrow{P'} = \vec{F} + \overrightarrow{PF} \Rightarrow$ P'(1|–3|–8)

160/ 9 Spiegelpunkt

a) P' (3|–1|13) b) P' (6|2|–4) c) P' (–6|–4|8)

d) P' (2|2|2) e) P' (3|3|0) f) P' (6|0|0)

160/10 Gegenseitige Lage von Kugel und Ebene

a) d(M;E) > r $\Rightarrow$ kein gemeinsamer Punkt
d(M;E) = r $\Rightarrow$ ein gemeinsamer Punkt
d(M;E) < r $\Rightarrow$ Schnittkreis

b) d(O;E) = $\frac{8}{7} > 1 = r \Rightarrow$ kein gemeinsamer Punkt

c) d(O;E) = 1 = r $\Rightarrow$ ein gemeinsamer Punkt

d) d(O;E) = $\frac{6}{7} < 1 = r \Rightarrow$ Schnittkreis

e) d(O;E) = 0 > 1 = r $\Rightarrow$ Schnittkreis (Großkreis)

160/11 Der Schnittkreis einer Kugel mit einer Ebene

a) d(M;E) = 3 < 5 = R

b) Pythagoras $\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - d(M;E)^2} = 4$

c) I: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, M_k: $\lambda = -1 \Rightarrow M_k\ (-1|4|2)$

d) d(M;E) = 12 < 13 = R, r = 5, I: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, M_k: $\lambda = -4 \Rightarrow M_k\ (-2|7|-7)$

e) d(M;E) = 10 < 12,5 = R, r = 7,5, I: $\vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, M_k: $\lambda = 2 \Rightarrow M_k\ (6|-8|0)$

Training der Grundkenntnisse

161/12 Spiegelung eines Punktes an einer Geraden

a) AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 8-2\lambda \\ -1+\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow d(P;X)^2 = \left|\overrightarrow{PX}\right|^2 = 66 - 36\lambda + 6\lambda^{\ 2}$,

minimaler Abstand für $\left(d(P;E)\right)' = -36 + 12\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow F\left(-1/-2/1\right)$

b) $\overrightarrow{P'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P'\left(-3/0/3)\right)$

c) Bestimme zunächst den Fußpunkt F des Lotes zu AC durch B, $\vec{D} = \vec{F} + \overrightarrow{BF}$.

161/13 Grundwissen: Flächeninhalt eines Dreiecks

a) $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{7}{2}$ b) $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{13}{2}$

161/14 Grundwissen: Pyramidenvolumen

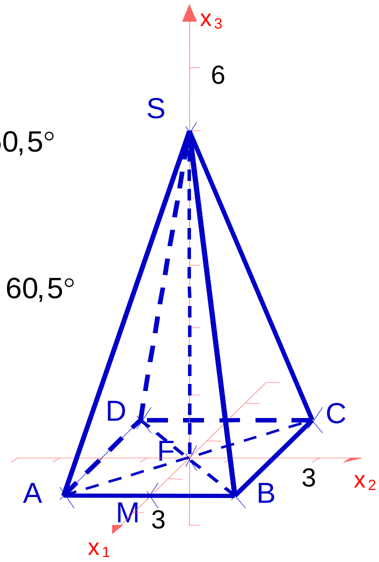
a) Merkhilfe $\Rightarrow V = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)\right| = \frac{3}{2}$

b) E(PQR): $2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3 = 0$, S in HNF(E) $\Rightarrow d = \frac{12}{\sqrt{14}}$

oder $h = 3\cdot\frac{V}{G} = 3\cdot\frac{\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}7\\1\\5\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\\4\end{pmatrix}\right)\right|}{\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}7\\1\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{12}{\sqrt{14}}$

161/15 Winkel an einer Pyramide

a) siehe rechts



b) $\tan\phi = \frac{\overline{FS}}{\overline{FM}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \phi \approx 68{,}2°$, $\tan\sigma = \frac{\overline{FS}}{\overline{AF}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma \approx 60{,}5°$

$\cos\phi = \frac{\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}}{2\cdot\sqrt{29}} \Rightarrow \phi \approx 68{,}2°$, $\cos\sigma = \frac{\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{8}} \approx 60{,}5°$

c) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}20\\0\\8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}0\\20\\-8\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos\phi = \frac{64}{464} \Rightarrow \phi \approx 82{,}1°$

d) $V = \frac{1}{3}\cdot\overline{AB}^2\cdot\overline{FS} = \frac{80}{3}$

161/16 Grundwissen: Besonderes Viereck

a) E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, A erhält man für $\lambda = 2$ und $\mu = 0$.

E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-8\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$

A) richtig, $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD} \Rightarrow AB \parallel CD$

B) richtig, $\overline{BC} = \overline{DA} = 3$

C) falsch, BC und DA sind nicht parallel.

D) richtig, folgt aus A und B

c) AC: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, BD: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow M(0/4/0)$

d) AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DX} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -6+4\lambda \\ -3+\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{DX}\right|^2 = 18\lambda^2 - 54\lambda + 45$,

Minimum für $36\lambda - 54 = 0 \Rightarrow \lambda = 1{,}5$, $d(D;AB) = \left|\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4{,}5} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

e) $F_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \cdot d(D;AB) = \frac{1}{2}\left(6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = 13{,}5$